"Du wolltest doch Algebra, da hast du den Salat!"

Jules Verne

Lieber Urs,

vor langer, langer Zeit fragtest du mich mal, was es mit komplexen Zahlen so auf sich hat. Hier der Versuch einer Antwort, die hoffentlich mehr Klarheit schafft als Verwirrung.

Faust'sche Fragen

> *"Der Wissenschaftler findet seine Belohnung in dem, was Poincaré die Freude am Verstehen nennt, nicht in den Anwendungsmöglichkeiten seiner Erfindung."*
>
> *Albert Einstein*

Mathematik hat in ihren Anfängen viel mit Philosophie zu tun. Fragen wie "Was können wir überhaupt wissen?", "Inwieweit erlauben theoretische Überlegungen eine Aussage über die Wirklichkeit?" oder "Was ist die 'reale' Bedeutung eines mathematischen Objektes?" ergeben sich zwangsläufig, wenn man Mathematik betreibt. Die Fragen nach der Rechtfertigung von Mathematik – auch und gerade nicht anwendungsbezogener Mathematik – stellt sich meiner Ansicht nach hingegen nicht. Ebenso könnte man fragen, warum es sinnvoll ist, künstlerisch tätig zu sein oder Musik zu machen.

Die Bedeutung eines Objektes – zum Beispiel einer Zahl – ist jedem intuitiv klar. Jeder weiß, was er unter 'einer' Tomaten zu verstehen hat. Aber überleg dir mal, was du unter '1' verstehst; oder befrag einen deiner Freunde dazu: "Was ist 1?" Nicht etwa 1 Tomaten, 1 Auto oder 1 Euro, sondern einfach nur 1.

Von Bäckern, Banken und Bosonen

> *"Seit man begonnen hat, die einfachsten Behauptungen zu beweisen, erwiesen sich viele von ihnen als falsch."*
>
> *Bertrand Russell*

Noch prekärer wird die Lage, wenn du dir überlegst, was $\frac{1}{2}$ sein soll. Wenn du in einer Bäckerei einen halben Kuchen verlangst, wird es keine Probleme geben. Aber wenn der Bäcker anfängt den Kuchen zu teilen, und du den Einwand "Stop! Ich hätte gerne die obere Hälfte!" machst, dann wird selbst der netteste Bäcker krümelig. Was ist also ein halber Kuchen? Vielleicht jedes zweite Molekül? Oder von jedem seiner Atome die Hälfte?

Nicht anders ist die Lage mit '-1'. Umgangssprachlich bedeuten negative Zahlen 'minus' – zum Beispiel Schulden – haben. Aber versuch mal, jemandem -1 Franken zu geben. (Das ist was anderes, als ihm 1 Franken zu klauen!) Wenn das ginge, dann wärst du bald ein gemachter Mann: such dir einfach den nächstbesten Passanten und gib ihm $-1\,000\,000$ Franken!

Das obige Beispiel macht folgendes klar: es gibt viele Dinge im alltäglichen Leben, die sich kompakt in eine mathematische Sprache packen lassen, wobei bestimmte Zustände, Eigenschaften oder Vorgänge mathematischen Objekten oder Funktionen entsprechen. So wird bekanntlich dein Guthaben bei einer Bank als positive oder negative Zahl dargestellt; eine Überweisung als Addition oder Subtraktion von Zahlen.

Ob für einen Sachverhalt ein mathematisches Analogon existiert bzw. anwendbar ist, ist dabei für jede Situation neu zu prüfen.

> *"Verwechsle nie das Modell mit der Realität.*
> *Merksatz: Iss nicht die Speisekarte auf!"*
>
> *unbekannt*

In aller Regel ist die Wirklichkeit wesentlich komplizierter als ein Modell. Daher ist seine Reichweite zu klären, denn beim Modellieren 'vergisst' man einen Großteil der Wirklichkeit, um zu Vereinfachen und überhaupt Aussagen machen zu können.

Teilweise wird der Weg vom der Realität zum Modell sogar in der entgegengesetzten Richtung beschritten: Der Laser wurde bereits 1917 von Einstein vorhergesagt, lange bevor 1960 von Maiman der erste optische Laser entwickelt wurde. Viele Elementarteilchen – Neutron, Neutrino, Vektorbosonen, um nur einige zu nennen – wurden vorhergesagt oder postuliert (also 'erfunden'!), bevor sie entdeckt wurden. Nur um die altbewährte Theorie nicht über den Haufen werfen zu müssen oder unschöne Asymmetrien zu umgehen! Die theoretischen Vorhersagen machten die Entdeckung vielleicht erst möglich; hatten aber zumindest einen entscheidenden Anteil daran. In der Quantentheorie stösst man auf immer wieder auftauchende Formeln und Gleichungen, aber man hat keine Idee, was diese in der Wirklichkeit zu bedeuten haben und versucht diese zu deuten (selbst theoretische Physiker leben im Diesseits und empfinden Veranschaulichungen als durchaus hilfreich).

Wandertag

> *"Wir kommen nun zu dem entscheidenden Schritt mathematischer Abstraktion: wir vergessen, wofür die Symbole stehen. [...] [Der Mathematiker] braucht die Hände nicht in den Schoß zu legen; es gibt viele Operationen, die er mit diesen Symbolen ausführen kann, ohne jemals die Dinge betrachten zu müssen, für die sie stehen."*
>
> *Hermann Weyl*

Den meisten Zeitgenossen ist die Angabe von Orten durch ihre Koordinaten vertraut. So könnte der Vektor $v = (1, 3)$ dazu dienen, den Ort anzugeben, der sich 1 km östlich und 3 km nördlich von dir befindet. Entsprechend liegt $w = (-2, -1)$ dann 2 km westlich und 1 km südlich von dir. Bewegst du dich erst gemäß v und danach wie durch w angegeben, befindest du dich schließlich[1] an der Stelle $(-1, 2)$, also 1 km westlich und 2 km nördlich deines Ausgangsortes (Bild 1). Auf den Vektoren kann man also eine "Hintereinanderausführung" definieren und benennt das Ganze kurz und naheliegend mit '+'. Die Addition zweier Vektoren geschieht schlicht durch die Addition ihrer Komponenten:

$$v + w = (1, 3) + (-2, -1) = (1 - 2, 3 - 1) = (-1, 2)$$

Dabei macht es keinen Unterschied, ob du zuerst in Richtung v und danach in Richtung w gehst oder umgekehrt[2]. Dieser Sachverhalt findet Niederschlag in der Gleichung $w + v = v + w$. Gehst du nur den halben Weg nach v, dann bist du danach in

$$\tfrac{1}{2} \cdot v = \tfrac{1}{2} \cdot (1, 3) = \left(\tfrac{1}{2} \cdot 1, \tfrac{1}{2} \cdot 3\right) = (0.5, 1.5)$$

[1] bekanntlich ist die Erde eine Scheibe ☺

[2] Das ist keinesfalls selbstverständlich. Stell dir vor, du bist nahe am Nordpol und die Erde ist eine Kugel. Laufe dann nach der Regel $(0, 1)$ "1 km nach Osten". Dabei soll dein Ort so gewählt sein, daß du, wenn du nach Osten gehst, nach 1 km wieder an deinem Ausgangsort ankommst. Du stapfst also nur im Kreis 1 km um den Pol herum: $(1, 0) = (0, 0)$. Dann hast du $(1, 0) + (0, -1) + (0, 1) = (0, 0)$ (ost-süd-nord) aber $(0, -1) + (1, 0) + (0, 1) \approx (0.137, 0) \neq (0, 0)$! (süd-ost-nord)

Gehst du entgegengesetzt zu v, dann bist du in

$$-v = -(1, 3) = (-1, -3)$$

Die Länge des Weges, den du nach v zurücklegts, wird mit $|v|$ bezeichnet. Der Wert $|v|$ heißt Länge, Betrag oder Absolutwert von v und ergibt sich nach Pythagoras zu

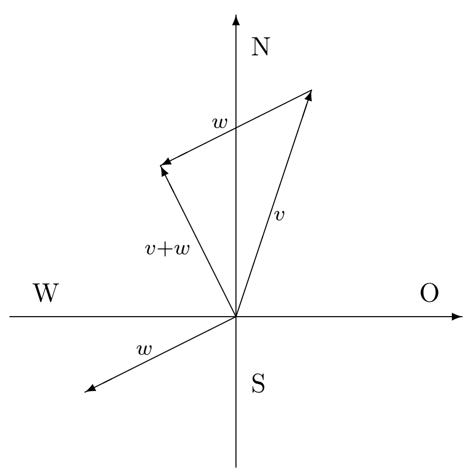
$$|v| = |(1, 3)| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10} \approx 3.16$$

Für beliebige v und w gilt immer

$$|v + w| \leqslant |v| + |w|$$

Diese Ungleichung wird auch 'Dreiecksungleichung' genannt, denn in einem Dreieck ist jede Kante kürzer als die Summe der Längen der beiden anderen Kanten. Die drei Kanten sind dabei v, w und $v + w$ (nochmals Bild 1).

Bild 1



Veranschaulichung und Addition der Vektoren v und w

Doch zurück zum eigentlichen Thema.

Hinter dem reellen Horizont

"Man darf nicht das, was uns unwahrscheinlich und unnatürlich erscheint, mit dem verwechseln, was absolut unmöglich ist."

Carl Friedrich Gauss

Eine wichtige, in der Natur vorkommende Kurve ist die Parabel. Wenn du einen Stein wirfst, dann bewegt sich dieser auf dem Stück einer Parabel. Ein Parabelbogen entsteht auch dann, wenn du in die Limmat pinkelst. Zur optimalen Begutachtung empfehle ich dir allerdings, dich neben jemand zu stellen, der in die Limmat pisst. Dann hast du nämlich einen viel besseren Blickwinkel.

Will man ausrechnen, wo zum Beispiel ein geworfener Stein einschlägt oder ankommt, dann muß man eine quadratische Gleichung lösen. Geometrisch gesehen sucht man die Schnittpunkte einer Geraden und einer Parabel. Im Endeffekt geht es darum, aus einer Zahl a die Quadratwurzel zu ziehen, das heißt man sucht Lösungen x der Gleichung $x^2 = a$ bzw. $x^2 - a = 0$. Für $a = 2$ erhält man zum Beispiel $x \approx 1.4142$ bzw. $x \approx -1.4142$ und schreibt $x = \pm\sqrt{2}$. Die Anzahl der Lösungen von $x^2 = a$ ist abhängig von a. Für $a > 0$ gibt es zwei Lösungen, für $a = 0$ eine Lösung, und für $a < 0$ gibt es keine Lösung. Das entspricht den drei möglichen Lagen von Gerade und Parabel: Die Gerade läuft an der Parabel vorbei (der Stein verfehlt das Zeil), sie berührt die Parabel (der Stein streift), oder schneidet sie an zwei Stellen (der Stein trifft im ersten Schnittpunkt).

Bereits im 16. Jahrhundert fand Cardano die Lösung für kubische Gleichungen, also Lösungen der Gleichung $x^3 + ax + b = 0$ mit gegebenen a und b. Eine solche Gleichung hat immer eine, zwei oder drei Lösungen. Dabei stieß man auf erhebliche mathematische Probleme. In manchen Fällen sieht man ohne weiteres an einer Skizze, daß die Gleichung drei Lösungen hat. Bei der Berechnung erhält man eine dieser Lösungen recht unproblematisch. Bei den anderen zwei Lösungen kommt man nur dann zum Ziel, wenn man voraussetzt, daß $x^2 = -1$ eine Lösung hat, was offenbar nicht der Fall ist!

Tun wir also so, als hätte $x^2 = -1$ eine Lösung und bezeichnen diese mit i, also

$$i = \sqrt{-1}$$

und schauen uns an was passiert, wenn wir mit i rechnen wie mit einer 'normalen' Zahl.

Vielfache von i werden imaginäre Zahlen genannt und haben die gleiche Eigenschaft wie i: sie erzeugen beim Quadrieren negative reelle Zahlen. So ist $(2i)^2 = -4$. Die Addition funktioniert naheliegend: $2i + 5i = 7i$. Addiert man eine imaginäre Zahl zu einer reellen Zahl, dann nennt man das Ergebnis eine komplexe Zahl, zum Beispiel $1 + i$. Eine komplexe Zahl z hat einen Realteil $z_1 = \mathfrak{Re}\, z$ und einen Imaginärteil $z_2 = \mathfrak{Im}\, z$, wobei z_1 und z_2 reelle Zahlen sind. Die komplexe Zahl z kann man dann so schreiben:

$$z = z_1 + z_2 i = \mathfrak{Re}\,(z) + i \cdot \mathfrak{Im}\,(z)$$

Für die Addition gilt

$$\begin{aligned} v + w &= (v_1 + v_2 i) + (w_1 + w_2 i) \\ &= v_1 + w_1 + (v_2 + w_2) \cdot i \end{aligned}$$

und für die Multiplikation

$$\begin{aligned} v \cdot w &= (v_1 + v_2 i) \cdot (w_1 + w_2 i) \\ &= v_1 w_1 - v_2 w_2 + (v_1 w_2 + v_2 w_1) \cdot i \end{aligned}$$

indem man ausmultipliziert wie gewohnt und beachtet, daß $i^2 = -1$ ist.

Dieser Weg um komplexe Zahlen einzuführen ist ohne Frage etwas ruppig. Man definiert i als Lösung einer Gleichung, die keine reelle Lösung hat, und rechnet damit rum als wär nix passiert! Das wirkt alles recht willkürlich und es stellt sich die Frage, ob so etwas überhaupt “erlaubt” ist.

Aus diesem Dilemma kann man sich aber einfach befreien. Wie du siehst, haben die oben erwähnten Vektoren ähnliche Eigenschaften wie die aus dem Hut gezauberten komplexen Zahlen: zwei reelle Komponenten, komponentenweise Addition etc. Was für Vektoren noch nicht definiert war, war das Produkt zweier Vektoren. Man könnte zum Beispiel definieren

$$\begin{aligned} v \cdot w &= (v_1, v_2) \cdot (w_1, w_2) \\ &= (v_1 w_1 - v_2 w_2, v_1 w_2 + v_2 w_1) \end{aligned}$$

Falls die zweiten Komponenten von v und w gleich Null sind, dann spielt sich alles in der ersten Komponente ab:

$$\begin{aligned} (v_1, 0) + (w_1, 0) &= (v_1 + w_1, 0) \\ (v_1, 0) \cdot (w_1, 0) &= (v_1 \cdot w_1, 0) \end{aligned}$$

Daher unterscheiden wir ab jetzt nicht mehr zwischen Zahlen und Vektoren, deren zweite Komponente gleich Null ist. $(x, 0)$ ist lediglich eine umständliche Schreibweise für die reelle Zahl x. Mit dieser Konvention und der Abkürzung $i = (0, 1)$ schreibt sich ein beliebiger Vektor v als

$$\begin{aligned} v &= (v_1, v_2) = (v_1, 0) + (0, v_2) \\ &= v_1 + v_2 \cdot (0, 1) \\ &= v_1 + v_2 \cdot i \end{aligned}$$

Zudem hat man

$$i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$$

Voilà! Komplexe Zahlen sind nichts weiter als Vektoren, denen eine geeignet gewählte Multiplikation verpasst wurde! Die erste Komponente spielt dabei die Rolle des Realteils der komplexen Zahl, die zweite Komponente die des Imaginärteils. Die Wahl der Multiplikationregel ist das A & O. Es gelten die selben Rechenregeln wie aus dem Reellen vertraut (Klammern ausmultiplizieren, etc) und die Multiplikation ist umkehrbar, das heißt man kann eine Division definieren:

$$\frac{w}{v} = w \cdot \frac{1}{v} \quad \text{wobei} \quad \frac{1}{v} = \frac{v_1 - v_2 i}{v_1^2 + v_2^2} = \frac{v_1 - v_2 i}{|v|^2} \quad \text{mit} \quad v \neq 0$$

Die Bedeutung der komplexen Zahlen reicht weit über die Lösung von algebraischen Gleichungen hinaus. Viele Resultate und Beweise, die im Reellen nur sehr mühsam zu erhalten sind, ergeben sich im Komplexen fast von selbst und sind zudem übersichtlicher zu formulieren. Das mag zunächst verwundern, denn das Rechnen mit komplexen Zahlen ist komplizierten als das Rechnen mit reellen Zahlen. Zudem kann man komplexe Zahlen nicht anordnen[3]. Dieses kleine Handicap ist jedoch unbedeutend im Vergleich zu dem, was man beim Überschreiten des reellen Horizonts gewinnt. Funktionen, die nur im Reellen definiert waren, kann man auf die komplexe Ebene ausdehnen. Die gesamte (reelle) Analysis hat ihren Fortgang in der Funktionentheorie – der komplexen Analysis. Differential- und Integralrechnung werden ins Komplexe übertragen, zum Beispiel die trigonometrischen Funktionen Sinus und Cosinus und die Exponentialfunktion[4]:

$$\begin{aligned}
\sin z &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} \pm \cdots \\
\cos z &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} \pm \cdots \\
e^z &= 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots
\end{aligned}$$

Die Variable z ist jetzt nicht mehr wie gewohnt reell, sondern komplex.

Für die drei obigen Funktionen ergibt sich der verblüffende, von Euler entdeckte Zusammenhang

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

das heißt die e-Funktion ist periodisch mit der Periode $2\pi i$, denn sin und cos haben die Periode 2π (Bild 3). Ausserdem erkennt man an der rechten Seite der Gleichung, daß sich $e^{i\varphi}$ auf einem Kreis mit Radius 1 bewegt, wenn φ (phi) das Intervall von 0 bis 2π durchläuft. Der Kreis beginnt in 1 ($e^0 = (1,0) = 1$) und wird entgegen dem Uhrzeigersinn um den Ursprung $0 = (0,0)$ durchlaufen.

Versuch einfach mal ein paar Werte für φ mit dem Taschenrechner durch. Nimm ein φ, berechne $x = \cos\varphi$ und $y = \sin\varphi$ und trage den Wert $x + iy$, der ja dem Vektor (x, y) entspricht, in ein Koordinatensystem ein. Vergiss nicht, deinen Taschenrechner vorher auf 'Bogenmaß' (rad) umzustellen[5]. Falls dein Taschenrechner nur mit Grad arbeitet, dann gib

[3] Die Anordnung der reellen Zahlen auf einem Zahlenstrahl findet keine Fortführung in die flächig angeordneten komplexen Zahlen. Man hat also keine Relationen wie 'größer' oder 'kleiner', und Begriffe wie 'positiv' sind nicht sinnvoll. Man kann aber den Abstand zweier komplexen Zahlen definieren, was vollauf genügt. Dieser ist $|v - w|$.

[4] Die Größe $n!$ heißt 'n Fakultät' und ist definiert als

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \quad \text{und} \quad 0! = 1$$

Die Zahl $e \approx 2.71828$ heißt 'Eulersche Zahl'. Sie und π sind die beiden wichtigsten mathematischen Konstanten.

[5] In der Mathematik werden Winkel üblicherweise im Bogenmaß angegeben. Die Festlegung der gewohnten Winkeleinteilung des Vollwinkels in 360° – das sogenannte Altgrad – ist vom mathematischen Standpunkt aus absolut willkürlich. Viel naheliegender ist es, den Vollwinkel mit 2π festzulegen. Man hat also $360° \mathrel{\hat{=}} 2\pi$.

die Werte in ° an, und er macht die Umrechnung selber. In diesem Falle haben sin und cos eine Periode von 360°. Für 90° erhältst du zum Beispiel das Ergebnis $\sin 90° = \sin\frac{\pi}{2} = 1$ und $\cos 90° = \cos\frac{\pi}{2} = 0$. Daher ist $e^{\frac{\pi}{2}i} = i$.

Polarkoordinaten

> *"We could, of course, use any notation we want; do not laugh at notations; invent them, they are powerful. In fact, mathematics is, to a large extent, invention of better notations."*
>
> *Richard P. Feynman*

Die Spitze des Vektors $(x, y) = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ läuft wie gesagt auf einem Kreis mit Radius 1 um 0. Bei 0° zeigt er nach rechts $(1 = (1, 0))$, bei $90° \hat{=} \frac{\pi}{2}$ nach oben $(i = (0, 1))$, bei $180° \hat{=} \pi$ nach links $(-1 = (-1, 0))$, bei $270° \hat{=} \frac{3}{2}\pi$ nach unten $(-i = (0, -1))$ und bei $360° \hat{=} 2\pi$ schliesslich wieder nach rechts. Durch eine geeignete Wahl des Winkels φ kann man (x, y) auch zu jedem anderen Punkt auf dem Kreisumfang zeigen lassen. Wenn man zudem die Länge des Vektors variiert, kann man damit jeden beliebigen Punkt der Ebene erreichen. Der Vektor $(r\sin\varphi, r\cos\varphi)$ läuft auf einem Kreis mit Radius r. Das Zahlenpaar (r, φ) kann somit dazu verwendet werden, einen Punkt in der Ebene anzugeben, wobei r den Abstand zum Ursprung angibt und φ die Richtung (Bild 2).

Diese Darstellung eines Punktes in der Ebene – bzw. einer komplexen Zahl – heißt 'Darstellung in Polarkoordinaten'; im Gegensatz zur Darstellung in kartesischen Koordinaten, welche Angaben in der Form links-rechts und oben-unten bzw. ost-west und nord-süd enthält. Um eine Verwechslung mit kartesischen Koordinaten zu vermeiden, werde ich fortan den Index p an Polarkoordinaten drankleben:

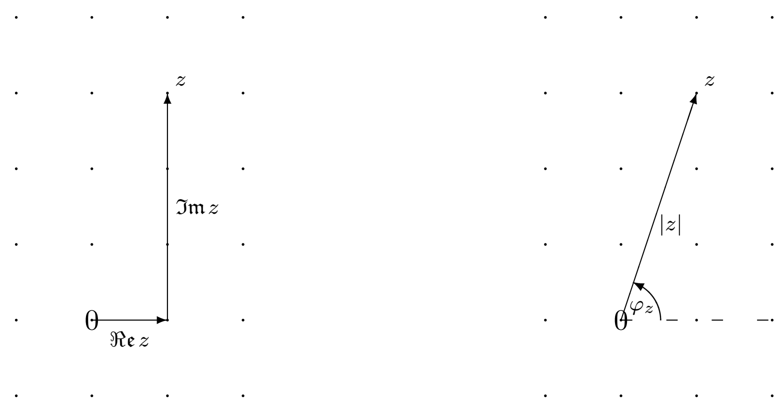
$$(r, \varphi)_{\mathrm{p}} = r \cdot (\cos\varphi, \sin\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$

Hiermit ist auch schon angegeben, wie Polarkoordinaten in 'normale' Koordinaten umgerechnet werden können. Die Richtung kartesisch→polar ist nicht ganz so einfach. Der Abstand von z zum Ursprung ist $r_z = |z|$. Den Winkel φ_z heraus zu bekommen, der zu z gehört, ist etwas Rumrechnerei mit Winkelfunktionen, und ist hier nicht weiter von Interesse. Die Funktion wird 'Argument' genannt und mit arg bezeichnet:

$$z = (|z|, \varphi_z)_{\mathrm{p}} = (|z|, \arg z)_{\mathrm{p}} = |z| \cdot e^{i \arg z}$$

Für eine Zahl mehr als eine Darstellung zu haben, ist immer vorteilhaft. Man kann zu einer anderen Darstellung wechseln, wenn diese günstiger ist. Das ist auch bei reellen und ganzen Zahlen nicht anders; diese kann man als Dezimalbruch angeben, als Dual- oder Hexadezimalzahl, als Kettenbruch, Längen in Lichtjahren, Meter oder Ångstrøm, oder was es sonst noch alles gibt. In der Astronomie werden Koordinaten nicht in xyz-Koordinaten angegeben, sondern in Elevation (Winkel über dem Horizont) und Azimut (die Himmelsrichtung, wobei 0° = Nord). In der Geographie erfolgen Ortsangaben in Längen- und Breitengraden und der Höhe über dem Meeresspiegel.

Bild 2



Kartesische Koordinaten (links) und Polarkoordinaten (rechts).
Für $z = 1 + 3i$ ist $|z| = \sqrt{10} \approx 3.16$ und $\varphi_z = \arctan 3 \approx 71.56°$

Einen Fallstrick haben Polarkoordinaten allerdings: die Darstellung ist nicht mehr eindeutig. Macht man den Winkel φ größer als 360°, dann durchläuft man wieder die gleichen Punkte wie vorher schon: Für eine beliebige ganze Zahl k gilt

$$(r, \varphi)_\mathrm{p} = (r, \varphi + k \cdot 2\pi)_\mathrm{p} \mathrel{\hat{=}} (r, \varphi + k \cdot 360°)_\mathrm{p}$$

Die Darstellung wird erst dann eindeutig wenn man verlangt, daß $0° \leqslant \varphi < 360°$ bzw. $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ und $\varphi_0 = 0$ ist.

Die Darstellung der Addition geschieht wegen

$$\begin{aligned} \mathfrak{Re}\,(v + w) &= \mathfrak{Re}\,v + \mathfrak{Re}\,w \\ \mathfrak{Im}\,(v + w) &= \mathfrak{Im}\,v + \mathfrak{Im}\,w \end{aligned}$$

wesentlich einfacher in kartesischer Schreibweise als in Polarkoordinaten. Anders sieht es hingegen mit der Multiplikation aus. Schauen wir uns also nochmals die Multiplikation an:

$$\begin{aligned} v \cdot w = (r_v, \varphi_v)_\mathrm{p} \cdot (r_w, \varphi_w)_\mathrm{p} &= r_v \cdot e^{i\varphi_v} \cdot r_w \cdot e^{i\varphi_w} \\ &= r_v \cdot r_w \cdot e^{i(\varphi_v + \varphi_w)} \qquad \text{denn } e^a e^b = e^{a+b} \\ &= (r_v \cdot r_w, \varphi_v + \varphi_w)_\mathrm{p} \end{aligned}$$

Das sieht doch einfacher aus als im Kartesischen, darüber hinaus gibt es in dieser Darstellung kein ‘Durchmischen’ der Komponenten:

$$\begin{aligned} r_{v \cdot w} &= r_v \cdot r_w \\ \varphi_{v \cdot w} &= \varphi_v + \varphi_w \end{aligned}$$

Zudem ergibt sich eine geometrisch anschauliche Deutung der Multiplikation: es ist eine Drehstreckung. Die r-Komponente bewirkt eine Streckung um den Faktor r, die φ-Komponente eine Drehung um den Winkel φ (immer mit Drehachse in 0). Insbesondere bedeutet die Multiplikation mit $i = (1, \frac{\pi}{2})_\mathrm{p} \mathrel{\hat{=}} (1, 90°)_\mathrm{p}$ eine Drehung um 90° gegen den Uhrzeigersinn; eine Streckung/Stauchung erfolgt wegen $|i| = 1$ nicht. Blickst du zum Beispiel in Richtung $(1, 2)$ und drehst dich um 90° nach links, dann schaust du danach in die Richtung $(-2, 1)$, denn $(1 + 2i) \cdot i = -2 + i$.

Sogar das Exponenzieren mit einer reellen Zahl x ist in Polarkoordinaten sehr einfach anzugeben:

$$z^x = (r_z, \varphi_z)_\mathrm{p}^x = (r_z^x, x\varphi_z)_\mathrm{p}$$

Das kann man verwenden, um den Kehrwert $1/z$ anzugeben

$$\frac{1}{z} = z^{-1} = (|z|^{-1}, -\varphi_z)_\mathrm{p}$$

oder um Wurzeln zu ziehen

$$\sqrt{-1} = (-1)^{\frac{1}{2}} = (1, 180°)_\mathrm{p}^{\frac{1}{2}} = (1, 90°)_\mathrm{p} = i$$

Die zweite Wurzel aus -1 ergibt sich durch

$$\sqrt{-1} = (-1)^{\frac{1}{2}} = (1, 540°)_\mathrm{p}^{\frac{1}{2}} = (1, 270°)_\mathrm{p} = -i$$

Wie aus dem Reellen bekannt gibt es zu einer Zahl mehrere Quadratwurzeln. Auch aus i kann man Wurzeln ziehen:

$$\begin{aligned} \sqrt{i} &= (1, 90° + k \cdot 360°)_\mathrm{p}^{\frac{1}{2}} = (1, 45° + k \cdot 180°)_\mathrm{p} \\ &= (1, k \cdot 180°)_\mathrm{p} \cdot (1, 45°)_\mathrm{p} \\ &= \pm 1 \cdot (1, 45°)_\mathrm{p} \\ &= \pm \frac{1 + i}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

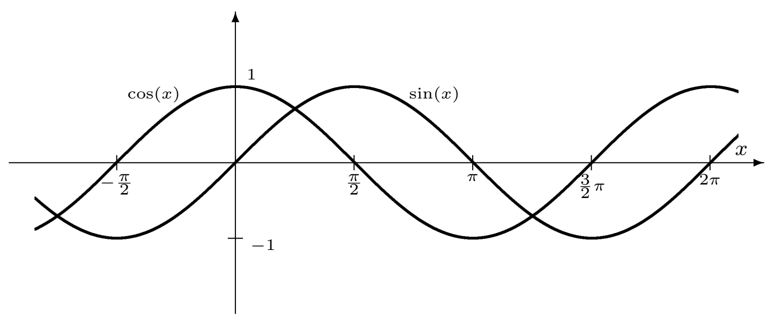
Sinus – die Wölbung der Toga

Eine Wechselspannung kann jeden erdenklichen Verlauf haben. Das ‘Wechsel’ heißt nur, daß die Spannung nicht konstant ist. Der zeitliche Verlauf einer ‘normalen’ Wechselspannung lässt sich hingegen durch eine Sinus- bzw. Cosinus-Funktion beschreiben[6]. Der Strom aus der Steckdose ist ein solcher Wechselstrom; das liegt an der Art und Weise, wie er gemacht wird: In einem Generator rotiert der Rotor mit konstanter Winkelgeschwindigkeit in dem vom Stator erzeugten Magnetfeld. Die in einer Rotorspule induzierte Spannung ist abhängig vom Winkel zwischen Magnetfeld und Spule und ist proportional zum Sinus bzw. Cosinus des Winkels (je nach dem, wie man den Winkel misst).

[6] Sinus und Cosinus unterscheiden sich nicht viel voneinander. Sie ergeben sich gegenseitig durch Phasenverschiebung bzw. Spiegelung: $\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(\pi - x)$ etc.

Stell dir einen Reflektor am Laufrad deines Fahrrades vor. Wenn du das Rad gleichmässig drehst und von der Seite anschaust, dann bewegt sich der Reflektor natürlich auf einer Kreisbahn. Schaust du senkrecht zur Achse, so daß das Rad wie eine schmale Linie erscheint, dann bewegt sich der Reflektor nur noch hin und her. Im zeitlichen Verlauf ist das eine Sinusschwingung. Ein Beobachter mit Blickrichtung senkrecht zu deiner und senkrecht zur Radachse wird einen Cosinus sehen.

Bild 3



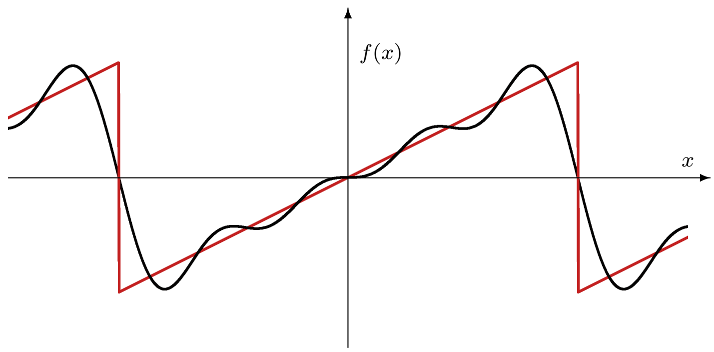
Die Funktionen sin und cos

Sinus und Cosinus sind in der Natur allgegenwärtig, zum Beispiel in (Wasser-, Schall-, elektromagnetischen, mechanischen) Wellen und Schwingungen. Aus einem Gemisch verschiedener Töne lassen sich die Höhen und Lautstärken der Einzeltöne rekonstruieren. Das Ganze nennt man Fourier-Analyse.

Jede periodische Funktion lässt sich darstellen als Summe von Grundschwingung und charakteristisch abklingenden Oberschwingungen. Sogar nichtperiodische Funktionen lassen sich einer Fourier-Analyse unterziehen, wobei ein ganzes Frequenzspektrum entsteht.

Allgemeine Funktionen – zum Beispiel Spannungen – zu untersuchen ist viel zu aufwändig. Statt dessen genügt es, die Fourier-Transformierte der Funktion zu kennen und sich auf die Untersuchung von Sinus- und Cosinus-Funktion beliebiger Frequenz zu beschränken. Aus dem Spannungsverlauf für jede Frequenz erhält man den Stromverlauf. Bei einfachen Netzwerken ist der Stromverlauf wieder sinusförmig mit der gleichen Frequenz wie die Spannung, allerdings mit anderer Amplitude und phasenverschoben. Aus diesen Einzellösungen bastelt man sich dann die Gesamtlösung zusammen: man macht eine Fourier-Synthese.

Bild 4



$$f(x) = \sin(x) - \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} - \frac{\sin(4x)}{4}$$

ist der Anfang der Fourier-Reihe für
die sägezahnförmige Grenzfunktion (rot)

Widerstandsbewegung

> *"Die Mathematik ist das Instrument, welches die Vermittlung bewirkt zwischen Theorie und Praxis, zwischen Denken und Beobachten: Sie baut die verbindende Brücke und gestaltet sie immer tragfähiger. Daher kommt es, daß unsere ganze gegenwärtige Kultur, soweit sie auf der geistigen Durchdringung und Dienstbarmachung der Natur beruht, ihre Grundlage in der Mathematik findet."*
>
> *David Hilbert*

Der ohmsche Widerstand R eines Leiters ist festgelegt als Quotient aus der Spannung U, die an ihm anliegt, und dem Strom I, der bei dieser Spannung durch ihn hindurchgeht:

$$R = \frac{U}{I} \quad \text{mir der Einheit } [R] = V/A = \Omega$$

Für Spulen und Kondensatoren ist die Sache nicht so einfach. Liegt an diesen Bauteilen eine Wechselspannung an, dann bauen sie im Rhythmus der Spannung ein Magnetfeld auf und ab oder speichern einen Teil der in sie hineingepumpten Energie in einem elektrischen Feld, um sie im nächsten Moment wieder an die Stomquelle zurück zu liefern. Das führt dazu, daß Strom und Spannung kein festes Verhältnis mehr zueinander haben. Diese Eigenschaften nennt man Induktivität bzw. Kapazität und gibt ihnen die Formelzeichen

L und C. Induktivitäten und Kapazitäten setzen dem Strom einen frequenzabhängigen Widerstand

$$R_L = \omega L \quad \text{bzw.} \quad R_C = \frac{1}{\omega C}$$

entgegen und bewirken eine Phasenverschiebung φ zwischen Strom und Spannung. Die Größe ω (omega[7]) heißt Kreisfrequenz und steht mit der Schwingungsfrequenz ν (ny) in dem Zusammenhang $\omega = 2\pi\nu$. Ausserdem entnehmen sie der Stromquelle im zeitlichen Mittel keine Energie – im Gegensatz zum Widerstand, der die in ihn reingesteckte Energie als Wärme verbrät.

Zur Berechnung von Netzwerken sind die obigen Angaben von R_L und R_C nicht ohne weiteres verwendbar, weil sie keine Information über die Phasenverschiebung enthalten. Die notwendige Berücksichtigung der Phasenverschiebung führt zu hässlicher, fehleranfälliger Rechnerei und unübersichtlichen Ergebnissen.

Durch R_L und R_C wird nur das Verhältnis der Effektivwerte von Strom und Spannung angegeben. Die Phasenverschiebung φ hat aber zur Folge, daß der Quotient aus Spannung und Strom – wie gesagt – keine Konstante mehr ist.

Ein eleganter Ausweg besteht darin, die reellwertigen Größen Spannung

$$U(t) = U_0 \cos \omega t$$

und Strom

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t - \varphi)$$

zu komplexwertigen Größen zu erweitern:

$$U(t) = U_0 e^{i\omega t} \quad \text{und} \quad I(t) = I_0 e^{i(\omega t - \varphi)}$$

Die physikalisch relevanten Informationen für Spannung und Strom werden im Realteil von $U(t)$ und $I(t)$ transportiert. Der Quotient aus Spannung und Strom

$$Z = \frac{U(t)}{I(t)} = \frac{U_0 e^{i\omega t}}{I_0 e^{i(\omega t - \varphi)}} = \frac{U_0 e^{i\omega t}}{I_0 e^{i\omega t} e^{-i\varphi}} = \frac{U_0}{I_0}\, e^{i\varphi}$$

ist plötzlich nicht mehr abhängig von der Zeit, er ist jetzt eine (komplexwertige) Konstante! Der Wert Z (manchmal auch $|Z|$) wird als Impedanz bezeichnet. Die Impedanz von Spule bzw. Kondensator ist

$$Z_L = i\omega L \quad \text{bzw.} \quad Z_C = \frac{1}{i\omega C} = -\frac{i}{\omega C}$$

Es gelten wieder die selben Rechenregeln für die Berechnung der Gesamtimpedanz zweier zusammen geschalteter Impedanzen Z_1 und Z_2, wie man sie von der Reihen- und Parallelschaltung von Widerständen kennt:

$$Z_{\text{reihe}} = Z_1 + Z_2 \quad \text{und} \quad \frac{1}{Z_{\text{parallel}}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$$

[7] ω nicht mit w verwechseln, dem kleinen W

Das Verhältnis der Effektivwerte von Spannung und Strom wird geliefert durch $|Z|$ und die Phasenverschiebung φ durch $\arg Z$.

Auf ähnliche Weise leitet man Ausdrücke für Wirk-, Schein- und Blindleistung einer Schaltung bzw. eines Verbrauchers her. Die Wirkleistung P_{W} ist die Leistung, die der Verbraucher wirklich in Energie umsetzt, und die der Stromzähler aufsummiert. Die Blindleistung P_{B} gibt an, wieviel Leistung zwischen dem Verbraucher und der Quelle hin- und herpendelt, ohne jedoch vom Verbraucher umgesetzt zu werden. Die Scheinleistung P_{S} gibt an, welche Leistung insgesamt maximal fliesst, und wie Leitungen, Netzgeräte etc. zu dimensionieren sind. Die drei Größen stehen in dem Zusammenhang

$$P_{\mathrm{S}} = P_{\mathrm{W}} + iP_{\mathrm{B}} \quad \text{und somit} \quad |P_{\mathrm{S}}|^2 = P_{\mathrm{W}}^2 + P_{\mathrm{B}}^2$$

Auch wenn ein Gerät im zeitlichen Mittel keine Leistung aus dem Netz entnimmt, wie zum Beispiel ein unbelastetes (ideales) Netzgerät, wird trotzdem (Blind-)Leistung mit dem Netz ausgetauscht. Alte Stromzähler zählten die Leistungsaufnahme (also $|P_{\mathrm{S}}|$), liessen aber unter den Tisch fallen, wenn die Energie wieder zurück ins Netz pendelte. Nicht ungeschickt von den E-Werken, denn es ist $|P_{\mathrm{S}}| \geqslant P_{\mathrm{W}}$.

Von Raupen, Apfelmännchen und Mandelbrot

"Math is like Ophelia in Hamlet – charming and a bit mad."
Alfred North Whitehead

Raupen fressen. Raupen wachsen. Aus Raupen werden Schmetterlinge. Und im nächsten Jahr gibt es eine neue Raupen-Generation. Die Größe x der Raupenpopulation ändert sich mit den Jahren. Geht man davon aus, daß eine Raupe – bzw. ein Schmetterling – im Durchschnitt k Nachkommen hat, und es im Jahr n schon x_n Krabbeltiere gegeben hat, dann gibt es im Jahr $n+1$

$$x_{n+1} = kx_n$$

von ihnen. Für $k = 1$ bleibt die Anzahl unverändert, für $k > 1$ wächst sie und für $0 \leqslant k < 1$ schrumpft sie. Wie man sich leicht überlegt, ergibt sich in diesem Modell die Anzahl der Individuen im Jahr n zu

$$x_n = k^n x_0$$

wenn x_0 die Größe der Anfangspopulation ist. Leider ist dieses überschaubare und nicht unplausible Modell wenig tauglich: Für $k < 1$ werden die Tierchen bald aussterben und für $k > 1$ ihre Anzahl über alle Grenzen wachsen.

Da ein natürlicher Lebensraum nur eine bestimmte Maximalzahl von Tierchen aufnehmen kann, führen wir eine obere Grenze für ihre Anzahl ein. Diese sei als 1 festgelegt, und die Größe x bewege sich jetzt zwischen 0 und 1. Die Anzahl der Individuen wird also nicht mehr absolut angegeben, sondern als Verhältnis zu ihrer maximal möglichen Anzahl. Die Wachstumsvorschrift

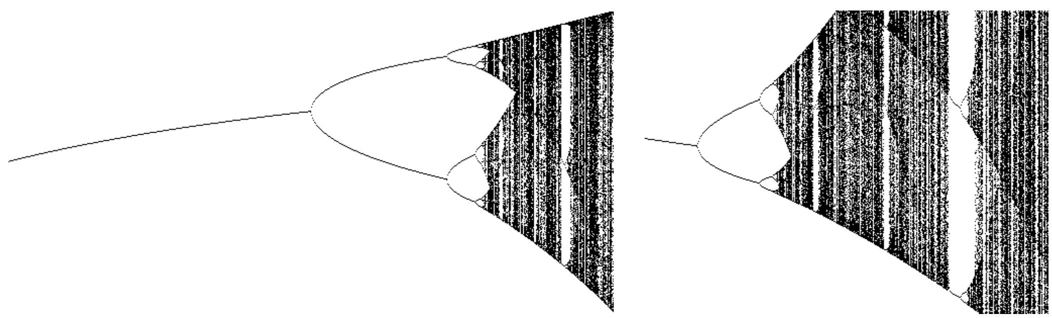
$$x \mapsto kx$$

wollen wir dann ersetzen durch

$$x \mapsto kx(1-x)$$

und erhalten den so genannten Verhulst-Prozess. Für $0 \leqslant k \leqslant 4$ ist dieser Wert wieder zwischen 0 und 1. Der Term $1-x$ bremst die Vermehrung um so stärker, je näher x an die Obergrenze 1 kommt. Dieser Prozess hat eine komplett andere Dynamik als der durch $x \mapsto kx$ modellierte: Die Populationsgröße bleibt – wie gesagt – begrenzt. Für $k < 1$ sterben die Tierchen ebenfalls wieder aus, unabhängig vom Startwert x_0. Für $1 \leqslant k \leqslant 3$ pendelt sich das System auf den Wert $1 - \frac{1}{k}$ ein. Macht man k noch größer, dann geschieht etwas seltsames: Das System nähert sich keinem festen Endzustand, sondern pendelt zwischen 2 Werten hin und her. Bei weiterem Vergrößern von k pendelt es zwischen 4, dann 8, 16, 32, … Werten, bis es schliesslich bei $k \approx 3.57$ ins Chaos übergeht (Bild 5).

Bild 5



Verhulst-Prozess im Intervall $2 \leqslant k \leqslant 4$, vergrößertes Detail

Diese Art von Chaos nennt man deterministisches oder vorherbestimmtes Chaos. Obwohl das System vollständig bekannt ist (es wird durch k und x_0 vollständig beschrieben), ist sein Verhalten chaotisch und nicht mehr vorhersagbar – auch dann nicht, wenn man exakt rechnet, also ohne Rundungsfehler wie sie zum Beispiel bei einer Computersimulation entstehen!

Chaos ist in der Natur allgegenwärtig: Planetenbewegung (bei mehr als zwei Gestirnen), gekoppelte Pendel, Wetter, turbulente Strömung, Verbrennungs-, Kristallisations- und Erstarrungsprozesse, um nur ein paar weitere Felder zu nennen. In den Achzigern wurde die Chaostheorie mit dem Aufkommen der ersten leistungsfähigen, bezahlbaren Rechner mit bildgebenden Verfahren richtig populär und drang sogar weit ins öffentliche Bewusstsein; eine absolute Ausnahmeerscheinung für eine mathematische Disziplin. Plötzlich kursierten überall bunte Bildchen und es war modern und 'in', am Stammtisch über die Chaostheorie zu philosophieren und Börsenkurse mit ihrer Hilfe zu deuten. Du hast bestimmt schon mal den Begriff 'Schmetterlingseffekt' gehört, der auf den chaotische Charakter des Wettergeschehens anspielt.

Zur eingehenderen Analyse des Verhulst-Prozesses transformiert man die Wachstumsgleichgung auf die Form

$$z \mapsto z^2 + c$$

wobei das komplexwertige z die Rolle von x übernimmt und der komplexwertige Parameter c die Rolle von k. Eine Einschränkung für die Werte von z und c wird nicht gemacht. Ein Beispiel: $c = i$ und $z_0 = 1$

$$\begin{aligned}
z_1 &= z_0^2 + i = 1 + i \\
z_2 &= z_1^2 + i = (1+i)^2 + i = 2i + i = 3i \\
z_3 &= z_2^2 + i = (3i)^2 + i = -9 + i \\
z_4 &= z_3^2 + i = (-9+i)^2 + i = 80 - 17i \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Abhängig von dem Startwert z_0 kann folgendes passieren: entweder bleibt z_n beschränkt, oder die Folge der z_n wandert gegen Unendlich. Alle Werte z_0, für welche die Folge $z_0 \mapsto z_1 \mapsto z_2 \cdots$ beschränkt bleibt, fasst man zur Julia-Menge J_c zusammen.

Indem man einen Teil der komplexen Ebene abrastert, kann man ein Bild von J_c erhalten. Je nach dem, ob z_0 zur Julia-Menge gehört oder nicht, wird der korrespondierende Punkt eingefärbt (Bild 6). Im obigen Beispiel geht $z_n \to \infty$, daher ist $1 \notin J_i$. Ändert man den Parameter c, dann ändert sich auch das Aussehen von J_c. Für manche c besteht J_c nur aus einem einzigen Stück (Bilder 6i und 6ii), für andere Werte zerbröselt J_c zu feinstem Staub (Bild 6iii).

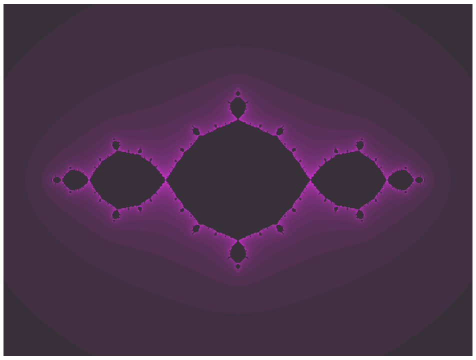
Wiederum kann man die komplexe Ebene abrastern, diesmal ist der veränderliche Wert c und die Farbe eines Punktes wählt man danach aus, ob J_c zusammenhängend ist oder nicht.

Alle Punkte der komplexen Ebene, für die J_c zusammenhängen ist, fasst man zur Mandelbrotmenge M zusammen (Bilder 7, 8 und 9). Man kann zeigen, daß $c \in M$ wenn $c \in J_c$ ist, und $c \notin M$ wenn $c \notin J_c$ ist. Ausserdem gilt $c \notin M$ falls $|c| > 2$ ist. Hieraus ergibt sich ein einfacher Algorithmus, um Bilder der Mandelbrotmenge zu erzeugen: man setzt $z = c$ und schaut sich an, was mit z unter der Iteration $z \mapsto z^2 + c$ passiert. Erkennt man im n-ten Schritt der Iteration, daß $|z| > 2$ ist, dann gehört c nicht zu M, und man färbt den Punkt in Abhängigkeit von n bunt ein. Ist hingegen nach $n_{\max}$ Iterationen immer noch $|z| \leqslant 2$, dann geht man davon aus, daß $c \in M$ ist und macht den Punkt schwarz.

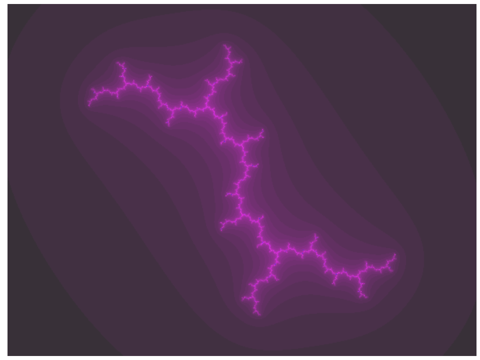
Wegen ihrer Form ist für die Mandelbrotmenge auch die Bezeichnung ‘Apfelmännchen’ verbreitet.

Die große Popularität der Chaostheorie geht zum Großteil auf die faszinierenden Bilder zurück, von denen auf den folgenden Seiten einige zu sehen sind. Die grundlegenden Arbeiten von Fatou und Julia vom Anfang der Jahrhundertwende verstaubten in den Archiven, bis sie um 1980 ‘wiederentdeckt’ wurden.

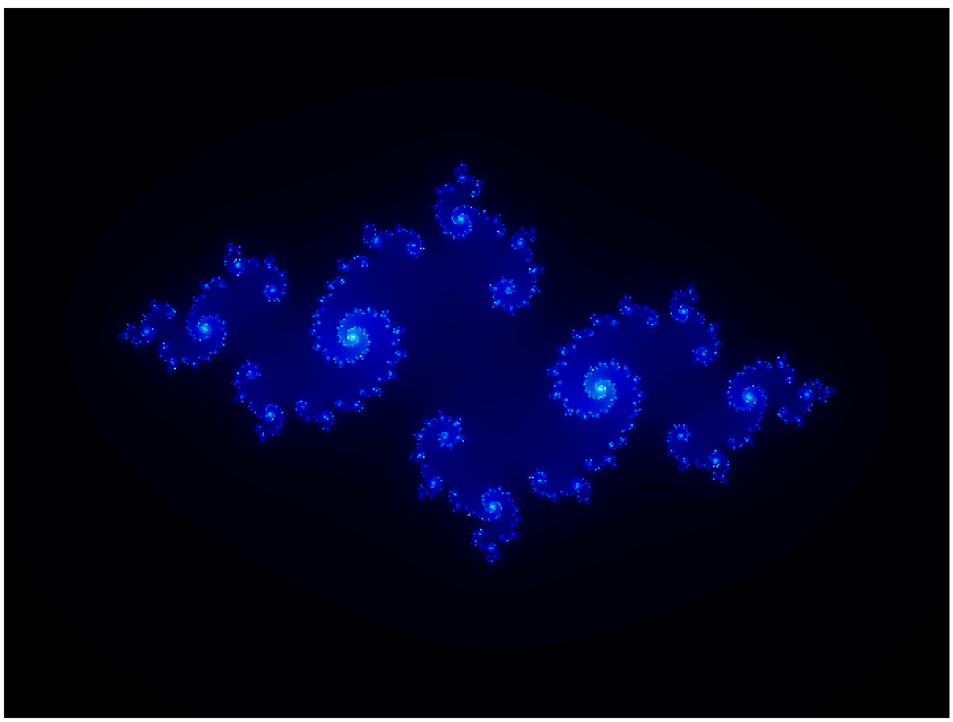
Bild 6



$c = -1$



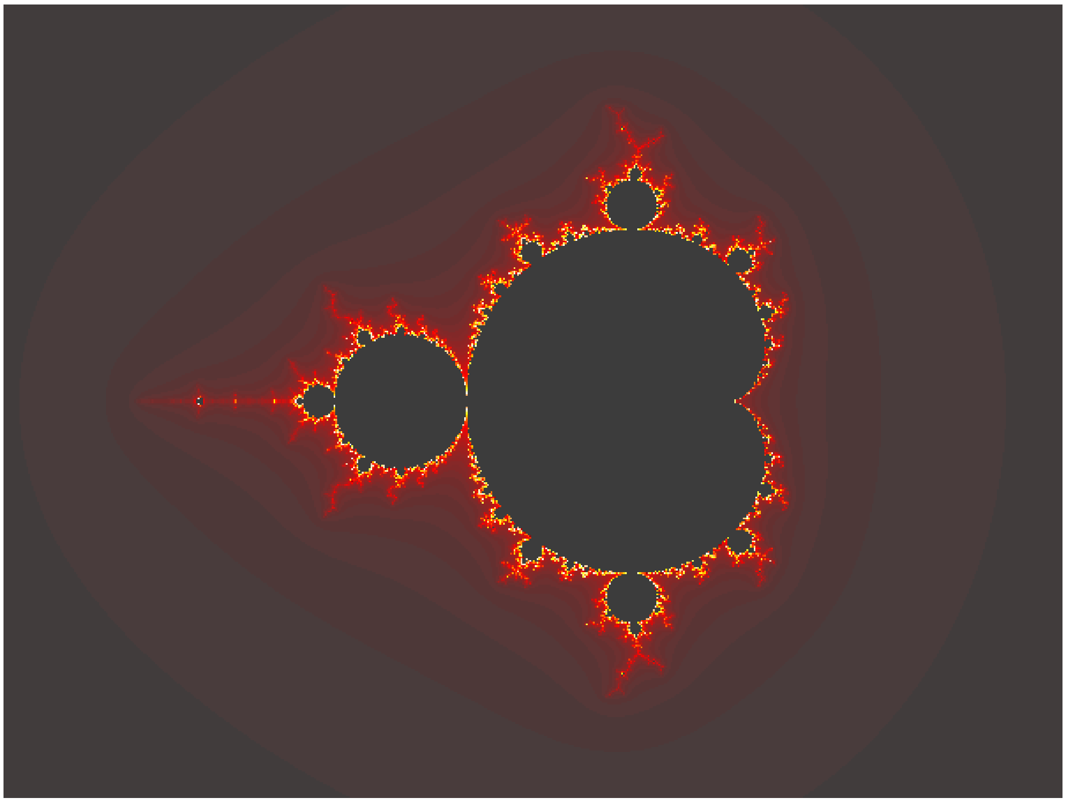
$c = i$



$c = -0.787 + 0.227i$

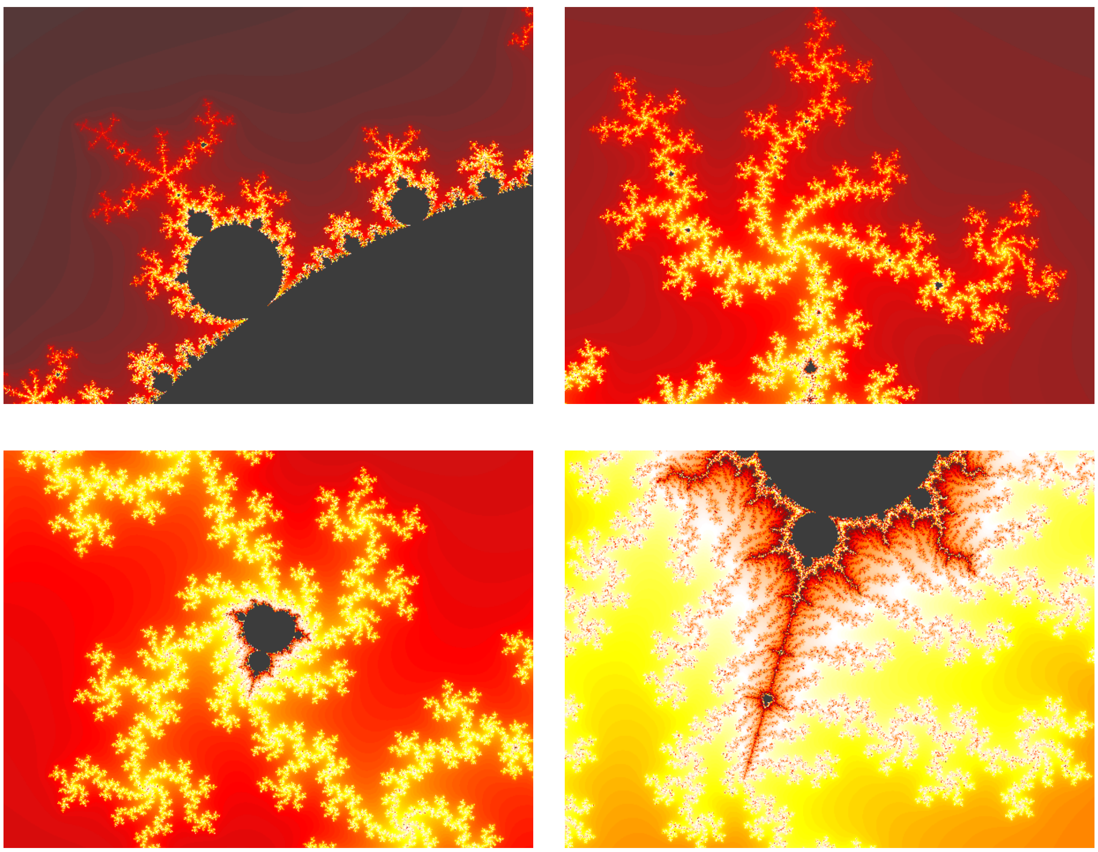
Julia-Mengen J_c für verschiedene Parameter c
im Bereich $-2 \leqslant \mathfrak{Re}\,(z_0) \leqslant 2$ und $-1.5 \leqslant \mathfrak{Im}\,(z_0) \leqslant 1.5$

Bild 7



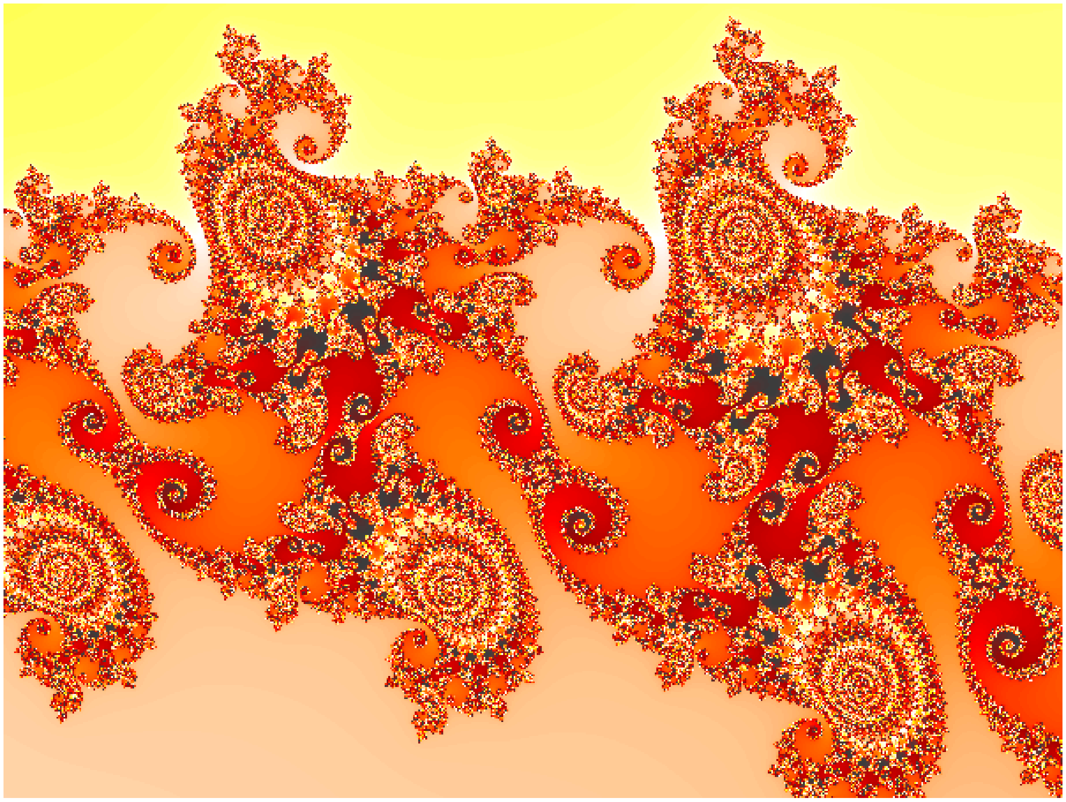
Die Mandelbrotmenge M im Bereich
$-2.5 \leqslant \mathfrak{Re} \leqslant 1.5$ und $-1.5 \leqslant \mathfrak{Im} \leqslant 1.5$
Die reelle Achse $\mathfrak{Im} = 0$ ist Symmetrieachse.
Was leuchtet, ist der Rand von M.

Bild 8



Sukzessive Ausschnittsvergrößerungen von M

Bild 9



Noch eine Ausschnittsvergrößerung von M

War das schon alles?

> *"Aber eines ist sicher, daß ich mich im Leben noch nicht annähernd so geplagt habe und daß ich große Hochachtung vor der Mathematik eingeflößt bekommen habe, die ich bis jetzt in ihren subtileren Teilen in meiner Einfalt für puren Luxus gehalten habe!"*
>
> *Albert Einstein*

In der statistischen Mechanik werden Vielteilchensysteme behandelt. Die Lösungen der auftretenden Zustandsgleichungen lassen Aussagen über das Verhalten des Systems zu. Die Aussagen werden um so genauer, je mehr Teilchen man zum Modellieren verwendet. Ungünstigerweise haben die Zustandsgleichungen keine reellen Lösungen, und komplexwertige Lösungen haben keinen realen Bezug. Erhöht man aber die Anzahl der Teilchen, dann wandern die Nullstellen immer näher an die reelle Achse heran. Man erhält physikalisch gehaltvolle (Näherungs-)Lösungen durch 'Runden' der komplexenwertigen Lösungen zu reellwertigen.

> *"Seit die Mathematiker über die Relativitätstheorie hergefallen sind, verstehe ich sie selber nicht mehr."*
>
> *Albert Einstein*

Die Relativitätstheorie lässt sich kompakt und handlich formulieren, wenn man so genannte Vierervektoren (x_1, x_2, x_3, ict) einführt. Die ersten drei Koordinaten geben den Ort an und die vierte dient zum Handhaben der Zeit, die vom Beobachter und von dessen Bewegungszustand abhängig ist. Die Transformation von einem (Inertial-)System in ein anderes sieht aus wie eine reelle Rotationsmatrix, deren Drehwinkel von der Relativgeschwindigkeit der beiden Systeme abhängt. Sie bewirkt, daß sich ein Teil der Zeitkomponente in die Raumkomponente dreht und umgekehrt, was zu Effekten wie Längenkontraktion und Zeitdilatation führt. Oben steht c übrigens für die Lichtgeschwindigkeit, die ja bekanntlich unabhängig von der Geschwindigkeit des Beobachters ist, t für die Eigenzeit des Beobachters und i wieder für die imaginäre Einheit.

Die Riemannsche ζ-Funktion (zeta-Funktion)

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

ist in der ganzen komplexen Ebene definiert. Die Verteilung ihrer nicht-reellen Nullstellen lässt einen Rückschluss auf die Verteilung der Primzahlen zu. Es wird also mit komplexanalytischen Methoden eine zahlentheoretische Fragestellung angegangen. Die berühmte Riemannsche Vermutung über die Nullstellen der ζ-Funktion ist wohl die wichtigste unbewiesene Vermutung. Die Laufzeitanalyse vieler zahlentheoretischer Algorithmen erfolgt unter Annahme der Riemannschen Vermutung. Hierzu gehören unter anderem Algorithmen zum Brechen moderner Verschlüsselungsverfahren, die bekanntlich massiven Gebrauch algebraischer und zahlentheoretischer Ergebnisse machen.

Wie du siehst, ist das Imaginäre nicht weniger Real oder Irreal wie das Negative oder Bruchzahlen; es durchdringt die gesamte Physik und Mathematik sowie die Ingenieurwissenschaften, und überdeckt die ganze Bandbreite von Theorie bis zu Praxis und Anwendung.

Niemand würde sich heute mehr weigern über eine Brücke zu gehen, nur weil der Statiker zur Berechnung komplexe Zahlen zur Hilfe nahm. Oder. . . ?

Weiterführendes findest du natürlich zu Hauf im Netz. Versuch mal folgende Suchbegriffe oder eine Kombination davon. Zum Teil gibt es echt ansprechende Bilder und sogar Java-Applets.

Viel Spaß beim Stöbern!

Ich hoffe, das Lesen war kurzweilig, hat dir ein bissl Spaß gemacht und nicht allzu viele Fragezeichen hinterlassen.

Liebe Grüße, Johann

Suchbegriffe

applet, attractor, blindleistung, blindwiderstand, complex dynamical systems, deterministic chaos, feigenbaum, fractal geometry, interactive, julia fatou set, mandelbrot, verhulst bifurcation, visualization, real and complex numbers, sine function

Links

Komplexe Zahlen & elementare Funktionen
Komplexe Zahlen I, Komplexe Zahlen II, Komplexe Funktionen, Sinus & Cosinus I, Sinus & Cosinus II

Chaos & Fraktale
Fraktale, Verhulst-Prozess, Mandelbrot-Applet, FractInt

Geschichtliches
Zur Geschichte der Analysis

Mathematiker
Girolamo Cardano, Albert Einstein, Leonhard Euler, Pierre Fatou, Mitchell Jay Feigenbaum, Richard Feynman, Jean Baptiste Fourier, Carl Friedrich Gauss, Gaston Julia, Benoit Mandelbrot, Hermann Minkowski, Georg Riemann, Brook Taylor, Pierre François Verhulst